Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Teoria dos Números - Nível 3

Carlos Gustavo Moreira

Aula 15

Funções multiplicativas e a função de Möbius

1 Funções Multiplicativas

Uma função f definida sobre $\mathbb{N}_{>0}$ é dita *multiplicativa* se dados dois números naturais a e b tais que $\text{mdc}(a,b) = 1$ então $f(ab) = f(a)f(b)$, e *totalmente multiplicativa* se $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo a e b. Vejamos algumas funções multiplicativas importantes.

Proposição 1. *Seja n um número inteiro positivo e k um real qualquer. As funções*

$$\sigma_k(n) \overset{\text{def}}{=} \sum_{d|n} d^k \qquad e \qquad \varphi(n) = \textit{função } \varphi \textit{ de Euler}$$

são multiplicativas. Em particular, as funções

$$\begin{aligned} d(n) &\overset{\text{def}}{=} \sigma_0(n) = \textit{número de divisores de } n \\ \sigma(n) &\overset{\text{def}}{=} \sigma_1(n) = \textit{soma dos divisores de } n \end{aligned}$$

são multiplicativas.

Demonstração. Sabemos que φ é multiplicativa. Por outro lado, se $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ é a fatoração canônica de n em primos então temos uma fórmula explícita

$$\sigma_k(n) = \frac{p_1^{(\alpha_1+1)k} - 1}{p_1^k - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_m^{(\alpha_m+1)k} - 1}{p_m^k - 1},$$

donde é fácil provar que σ_k é multiplicativa. $\square$

Uma função totalmente multiplicativa f fica completamente determinada por seus valores nos números primos. Impondo algumas restrições adicionais, temos o seguinte resultado

Teorema 2. *Seja $f\colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ uma função totalmente multiplicativa e monótona, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(n) = n^\alpha$.*

Demonstração. Trocando f por $1/f$, podemos supor sem perda de generalidade que f é estritamente crescente, e definamos $\alpha = \log_2 f(2)$. Vejamos que $f(n) = n^\alpha$. Para isto observemos que, aplicando f, para todo $m \in \mathbb{N}_{>0}$ temos

$$\begin{aligned} & 2^{\lfloor m \log_2 n \rfloor} \le n^m < 2^{\lfloor m \log_2 n \rfloor + 1} \\ \Longrightarrow\ & 2^{\alpha \lfloor m \log_2 n \rfloor} \le (f(n))^m < 2^{\alpha(\lfloor m \log_2 n \rfloor + 1)} \end{aligned}$$

Assim,

$$2^{\frac{\alpha \lfloor m \log_2 n \rfloor}{m}} \le f(n) < 2^{\frac{\alpha(\lfloor m \log_2 n \rfloor + 1)}{m}} \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}_{>0}.$$

Mas

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\alpha \lfloor m \log_2 n \rfloor}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\alpha(\lfloor m \log_2 n \rfloor + 1)}{m} = \alpha \log_2 n,$$

donde concluímos que $f(n) = 2^{\alpha \log_2 n} = n^\alpha$. □

Para uma extensão desse resultado para funções multiplicativas veja o exercício 30

Exemplo 3. *Encontrar condições necessárias e suficientes sobre m e n para que $n\varphi(m) = m\varphi(n)$.*

Solução: Se $n\varphi(m) = m\varphi(n)$ então

$$n\varphi(m) = mn \prod_{\substack{p \mid m \\ p \text{ primo}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = mn \prod_{\substack{q \mid n \\ q \text{ primo}}} \left(1 - \frac{1}{q}\right) = m\varphi(n).$$

Daí temos que n e m devem ter os mesmos divisores primos; caso contrário, consideremos $\{p_i\}$ e $\{q_j\}$ os fatores primos de n e m respectivamente que não são comuns aos dois números, então

$$\prod (p_i - 1) \prod q_j = \prod (q_j - 1) \prod p_i.$$

Mas, como $p_i \nmid q_j$ e $q_j \nmid p_i$ para todos os fatores primos, concluímos que

$$\prod p_i \,\Big|\, \prod (p_i - 1) \qquad \text{e} \qquad \prod q_j \,\Big|\, \prod (q_j - 1),$$

o que é impossível. Agora, se n e m tem os mesmos fatores primos prova-se diretamente da fórmula acima que $n\varphi(m) = m\varphi(n)$. □

O seguinte teorema nos mostra uma forma de construir funções multiplicativas.

Teorema 4. *Se f é uma função multiplicativa então a função*

$$F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$$

é também multiplicativa.

Demonstração. Sejam a e b inteiros tais que $\mathrm{mdc}(a,b)=1$ então

$$\begin{aligned} F(ab) &= \sum_{d\mid ab} f(d) = \sum_{d_1\mid a, d_2\mid b} f(d_1d_2) = \sum_{d_1\mid a, d_2\mid b} f(d_1)f(d_2) \\ &= \sum_{d_1\mid a}\sum_{d_2\mid b} f(d_1)f(d_2) = \sum_{d_1\mid a} f(d_1)\sum_{d_2\mid b} f(d_2) \\ &= F(a)F(b). \end{aligned}$$

Segue que F também é multiplicativa. □

Com o resultado anterior obtemos outro método para demonstrar que $\sigma_k(n)$ é multiplicativa, já que $f(n)=n^k$ é claramente uma função multiplicativa.

Exemplo 5. *Demonstrar que* $\varphi(n)d(n)\geq n$.

Solução: Se $\alpha\geq\beta\geq 0$ então para qualquer primo p temos $\varphi(p^\alpha)\geq\varphi(p^\beta)$, logo como φ é multiplicativa temos que $\varphi(n)\geq\varphi(d)$ para todo divisor d de n. Então temos

$$\varphi(n)d(n)=\sum_{d\mid n}\varphi(n)\geq\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n,$$

como queríamos demonstrar. Note que a igualdade só se obtém quando $n=1$ ou $n=2$. □

Exemplo 6. *Encontrar todos os inteiros* n *para os quais* $\varphi(n)=d(n)$.

Solução: Se $p\geq 3$ é um primo, temos que

$$\varphi(p^\alpha)=(p-1)p^{\alpha-1}\geq 2(1+2)^{\alpha-1}\geq 2\big(1+2(\alpha-1)\big)\geq\alpha+1=d(p^\alpha),$$

onde a igualdade só se dá quando $p=3$ e $\alpha=1$. Portanto, pela multiplicatividade das funções $\varphi(n)$ e $d(n)$, os únicos ímpares que satisfazem $\varphi(n)=d(n)$ são $n=1$ e $n=3$. Por outro lado, se $\alpha>3$ temos $\varphi(2^\alpha)=2^{\alpha-1}>\alpha+1=d(2^\alpha)$; para $\alpha=3$ obtemos as soluções $n=1\cdot 8=8$ e $n=3\cdot 8=24$.

Assim, só nos falta resolver os casos $\varphi(2n)=d(2n)\iff\varphi(n)=2d(n)$ e $\varphi(4n)=d(4n)\iff 2\varphi(n)=3d(n)$ onde n é ímpar. Temos $\varphi(5)=4=2d(5)$, $\varphi(15)=8=2d(15)$ e $\varphi(9)=6=2d(9)$, donde $2\cdot 5=10$, $2\cdot 9=18$ e $2\cdot 15=30$ também são soluções da equação inicial. Demonstremos agora que não existem mais soluções. Se $n=p^\alpha$ é potência de um primo ímpar p então para $p=3$ e $\alpha\geq 3$, ou para para $p=5$ e $\alpha\geq 2$, ou para $p\geq 7$, temos como acima que

$$\varphi(n)=p^{\alpha-1}(p-1)>2\alpha+2=2d(n)>\frac{3}{2}d(n).$$

Por outro lado, já sabemos que $\varphi(n)\geq d(n)$ para todo n ímpar. Assim, da multiplicatividade das funções $\varphi(n)$ e $d(n)$, obtemos que se n é divisível por 3^3, 5^2 ou por algum primo $p\geq 7$, então $\varphi(n)>2d(n)>\frac{3}{2}d(n)$ e analisando os casos restantes obtemos apenas as soluções apresentadas anteriormente.

Em conclusão, as únicas soluções de $\varphi(n)=d(n)$ são 1, 3, 8, 10, 18, 24, 30. □

O seguinte teorema relaciona a função $d(n)$ com a função $\lfloor x \rfloor$.

Teorema 7. *Seja n um inteiro positivo, então*

$$\sum_{k=1}^{2n} d(k) - \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor = n.$$

Demonstração. Seja

$$f(i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{1 \le k \le i} \left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor.$$

Observemos que para $i, k > 1$

$$\left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2i-2}{k} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{se } k \mid 2i \text{ ou } k \mid 2i-1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto para $i \ge 2$ temos

$$\begin{aligned} f(i) - f(i-1) &= \lfloor 2i \rfloor - \lfloor 2i-2 \rfloor + \sum_{2 \le k \le i} \left(\left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2i-2}{k} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{2i-2}{i} \right\rfloor \\ &= 2 + (d(2i) - 2) + (d(2i-1) - 2) + 1 \\ &= d(2i) + d(2i-1) - 1, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} d(k) &= d(2) + d(1) + \sum_{i=2}^{n} \big(f(i) - f(i-1) + 1 \big) \\ &= 3 + f(n) - f(1) + n - 1 \\ &= f(n) + n \end{aligned}$$

que era o que queríamos demonstrar. □

2 Função de Möbius e Fórmula de Inversão

Definimos a *função de Möbius* $\mu \colon \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{Z}$ por

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } a^2 \mid n \text{ para algum } a > 1 \\ (-1)^k & \text{se } n \text{ é produto de } k \text{ primos distintos.} \end{cases}$$

Facilmente se comprova que a função de Möbius é multiplicativa. Além disso

Lema 8. *Para todo inteiro positivo n temos*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{se } n = 1 \\ 0 & \textit{se } n > 1. \end{cases}$$

Demonstração. No caso $n = 1$ não temos nada para provar. Como a função $\sum_{d|n} \mu(d)$ é multiplicativa pelo teorema 4, basta mostra o lema para $n = p^k$ onde p é um número primo. De fato,

$$\sum_{d|p^k} \mu(d) = \sum_{j=0}^{k} \mu(p^j) = 1 - 1 = 0$$

como queríamos demonstrar. □

Teorema 9 (Fórmula de inversão de Möbius)**.** *Seja $f(n)$ uma função sobre os inteiros positivos e $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, então para todo n inteiro positivo,*

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Demonstração. Vejamos que

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1|\frac{n}{d}} f(d_1) \\
&= \sum_{d|n} \sum_{d_1|\frac{n}{d}} \mu(d) f(d_1) \\
&= \sum_{d_1|n} \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) f(d_1) \\
&= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d|\frac{n}{d_1}} \mu(d) = f(n)\mu(1) = f(n),
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Exemplo 10. *Uma pulseira é formada por pedras coloridas, de mesmo tamanho, pregadas em volta de um círculo de modo a ficarem igualmente espaçadas. Duas pulseiras são consideradas iguais se, e só se, suas configurações de pedras coincidem por uma rotação. Se há pedras disponíveis de $k \geq 1$ cores distintas, mostre que o número de pulseiras diferentes possíveis com n pedras é dado pela expressão*

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \cdot k^{n/d}.$$

Solução: No que segue o número k de cores de pedras estará sempre fixo. A cada pulseira podemos associar um *período*, que é definido como o menor divisor positivo d de n tal que a sequência das n pedras da pulseira é obtida a partir de uma sequência de d pedras repetida n/d vezes. Se o problema fosse contar pulseiras fixas, sem indentificar pulseiras que coincidem por uma rotação, a resposta seria claramente k^n. Ao considerarmos as n rotações de uma pulseira de período d, obtemos d pulseiras fixas distintas (i.e., distintas como pulseiras fixas, mas iguais a menos de rotação). Dizemos que uma pulseira com n pedras é *primitiva* se seu período é n. Se denotarmos por $g(n)$ o número de pulseiras primitivas com n pedras, temos que, para cada divisor d de n, o número de pulseiras com n pedras e período d é $g(d)$ (se o período é d, podemos tomar d pedras consecutivas e unir as pontas criando uma pulseira com d pedras, que será primitiva), e elas dão origem a $d.g(d)$ pulseiras fixas. Assim, temos, para todo inteiro positivo n, $\sum_{d|n} d.g(d) = k^n$, donde, pelo teorema anterior, $n.g(n) = \sum_{d|n} \mu(d)k^{n/d}$.

O número de pulseiras que queremos contar, como no enunciado, é

$$\sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \sum_{s|d} \mu(s)k^{d/s}.$$

Fazendo $t = d/s$ na última expressão, temos $d = st$, e $d \mid n$ equivale a $s \mid n/t$. Assim, podemos escrever a última expressão como

$$\sum_{t|n} \sum_{s|n/t} \frac{1}{st}\mu(s)k^t = \sum_{t|n} \frac{k^t}{t} \sum_{s|n/t} \frac{\mu(s)}{s},$$

que, pelo exemplo anterior, é igual a $\sum_{t|n} \frac{k^t}{t} \cdot \frac{t}{n}\varphi(n/t) = \sum_{t|n} \frac{k^t}{n} \cdot \varphi(n/t)$, que, por sua vez (fazendo $r = n/t$), é igual a $\frac{1}{n}\sum_{r|n} \varphi(r) \cdot k^{n/r}$. $\square$

Agora, observemos que para todo número natural m, f e F definidas como antes,

$$\sum_{n=1}^{m} F(n) = \sum_{n=1}^{m} \sum_{d|n} f(d) = \sum_{d=1}^{m} \sum_{\substack{d|n \\ 1 \le n \le m}} f(d)$$

Como $f(d)$ é somado $\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$ vezes, então

$$\sum_{n=1}^{m} F(n) = \sum_{d=1}^{m} f(d) \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor.$$

No caso particular em que $f(n) = \varphi(n)$ temos que $F(n) = n$ e assim

$$\frac{m(m+1)}{2} = \sum_{n=1}^{m} \varphi(n) \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor.$$

Se $f(n) = \mu(n)$, então $F(n) = 0$ se $n > 1$ e $F(1) = 1$ pelo lema 8, portanto

$$1 = \sum_{n=1}^{m} \mu(n) \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor.$$

A igualdade anterior nos permite resolver o seguinte

Exemplo 11. *Demonstrar que, para todo inteiro $m > 1$,*

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu(k)}{k} \right| < 1.$$

Solução: Como $-1 < \mu(k)\left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \frac{m}{k}\right) < 1$ e $\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - \frac{m}{k} = 0$ quando $k = 1, m$, então

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \mu(k) \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor - m \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu(k)}{k} \right| < m - 1$$

Usando a identidade acima provada temos que

$$\left| 1 - m \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu(k)}{k} \right| < m - 1,$$

logo $\left| m \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu(k)}{k} \right| < m$ e simplificando m obtemos o que queríamos demonstrar. É conhecido (Mangoldt 1897) que se m tende para infinito, então a soma anterior converge para 0. □

Teorema 12 (Segunda fórmula de inversão de Möbius). *Sejam f, g funções reais com domínio $(0, +\infty)$ tais que*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{k}\right)$$

para todo x, então

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) g\left(\frac{x}{k}\right).$$

Demonstração. Observemos que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(k) \Big(\sum_{r=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{kr}\right) \Big) = \sum_{m=1}^{\infty} \Big(\sum_{k|m} \mu(k) \Big) f\Big(\frac{x}{m}\Big) = f(x),$$

como queríamos demonstrar. □

A seguinte é uma das formulações da famosa hipótese de Riemann, um dos problemas em aberto mais importantes da Matemática. O Clay Mathematics Institute oferece um prêmio de 1 milhão de dólares para a a primeira demonstração da Hipótese de Riemann (ver a página web `http://www.claymath.org/millennium/`).

Conjectura: [Hipótese de Riemann]

Se $\alpha > 1/2$, então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{m=1}^{n} \mu(m) = 0.$$

Podemos reenunciar esta conjectura assim: seja $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{se } t < 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} f(t/k) = 1 & \text{se } t \geq 1. \end{cases}$$

Então, para todo $\alpha > 1/2$,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(t)}{t^{\alpha}} = 0.$$

De fato, pela segunda fórmula de inversão de Möbius, temos

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\lfloor t \rfloor} \mu(m).$$

Problemas Propostos

Problema 13. *Encontrar todos os inteiros positivos n tais que*

$$n = d_6^2 + d_7^2 - 1,$$

onde $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$ são todos os divisores positivos do número n.

Problema 14. *Seja r o número de fatores primos diferentes de n, demonstrar que*

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^r.$$

Problema 15. *Seja n um inteiro positivo que não é primo e tal que $\varphi(n) \mid n-1$. Demonstrar que n possui ao menos quatro fatores primos distintos.*

Problema 16. *Dados dois números reais α e β tais que $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, demonstrar que existe um número natural m tal que*

$$\alpha < \frac{\varphi(m)}{m} < \beta.$$

Problema 17. *Seja m um inteiro positivo. Dizemos que um inteiro $m \geq 1$ é "superabundante" se*

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, m-1\} \qquad \frac{\sigma(m)}{m} > \frac{\sigma(k)}{k}.$$

Demonstrar que existe um número infinito de números superabundantes.

Problema 18. *Demonstrar que $d(n) < 2\sqrt{n}$.*

Problema 19. *Demonstrar que*

$$\frac{\sigma(n)}{d(n)} \geq \sqrt{n}.$$

Problema 20. *Encontrar todos os valores de n para os quais $\varphi(n) \mid n$.*

Problema 21. *Dois números a e b são* amigáveis *se $\sigma(a) = b$ e $\sigma(b) = a$. Por exemplo* 1184 *e* 1210 *são amigáveis (verificar!). Encontrar outra dupla de números amigáveis.*

Problema 22. *Demonstrar que $m \mid \sigma(mn-1)$ para todo n se, e só se, $m = 2$,* 3, 4, 6, 8, 12 *ou* 24.

Problema 23. *Demonstrar que*

$$\frac{\sigma(n!)}{n!} > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Problema 24. *Demonstrar que existem infinitos números naturais n para os quais $\sigma(x) = n$ não tem solução.*

Problema 25. *Demonstrar que para todo $m > 1$*

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu(k)}{k} \right| < \frac{2}{3}.$$

Problema 26 (IMO1998)**.** *Para cada inteiro positivo n, $d(n)$ denota o número de divisores de n. Determine todos os inteiros positivos k tais que $d(n^2) = kd(n)$ para algum n.*

Problema 27. *Se n é composto, mostre que $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$.*

Problema 28. *Determinar todos os números inteiros positivos n tais que $n = d(n)^2$.*

Problema 29. *Mostrar que $\varphi(n) + \sigma(n) \geq 2n$ para todo inteiro positivo n.*

Problema 30. *Seja $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função multiplicativa e crescente.*

(a) Prove que, para todo inteiro $M > 1$ e todo inteiro positivo n,

$$f(M^{n+1} - 1) \geq f(M^n - 1)f(M) \text{ e } f(M^{n+1} + 1) \leq f(M^n + 1)f(M).$$

Conclua que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f(M^n)} = f(M).$$

(b) Utilize o item anterior para M potência de primo para concluir que $f(p^k) = f(p)^k$ para todo primo p.

(c) Conclua que f é totalmente multiplicativa, e portanto existe $\alpha > 0$ tal que $f(n) = n^\alpha$ para todo inteiro positivo n.

Problema 31. *Dadas duas funções $f, g : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$, definimos o produto de Dirichlet (ou convolução de Dirichlet) $f * g : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ de f e g por*

$$f * g(n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d|n} f(d)g\Big(\frac{n}{d}\Big) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2).$$

(a) Prove que, se $s \in \mathbb{R}$ (ou $s \in \mathbb{C}$) e as séries $\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s}$ convergem absolutamente então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \sum_{n\geq 1} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 1} \frac{f * g(n)}{n^s}.$$

(b) *Prove que, para quaisquer funções* $f, g, h : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$, *temos* $f * g = g * f$ *e* $f * (g * h) = (f * g) * h$ *(isto é, o produto de Dirichlet é comutativo e associativo), e que a função* $I : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ *dada por* $I(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{se } n > 1 \end{cases}$ *é o elemento neutro do produto* $*$, *i.e.*, $I * f = f * I = f$, $\forall f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$.

(c) *Prove que se* f *e* g *são multiplicativas então* $f * g$ *é multiplicativa.*

(d) *Prove que, se* $f : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ *é tal que* $f(1) \neq 0$, *então existe uma única função* $f^{(-1)} : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{C}$ *tal que* $f * f^{(-1)} = f^{(-1)} * f = I$, *a qual é dada recursivamente por* $f^{(-1)}(1) = 1/f(1)$ *e, para* $n > 1$,

$$f^{(-1)}(n) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d|n, d<n} f\left(\frac{n}{d}\right) f^{(-1)}(d).$$

(e) *Prove que, se* f *é multiplicativa, então a função* $f^{(-1)}$ *definida no item anterior também é multiplicativa.*

Dicas e Soluções

Em breve

Referências

[1] F. E. Brochero Martinez, C. G. Moreira, N. C. Saldanha, E. Tengan - Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro, Projeto Euclides, IMPA, 2010.